

Title	波の共鳴という観点から見た不安定波動 (大自由度・強非線形の波動現象の数理)
Author(s)	伊賀, 啓太
Citation	数理解析研究所講究録 (1999), 1092: 57-67
Issue Date	1999-04
URL	<a href="http://hdl.handle.net/2433/62932">http://hdl.handle.net/2433/62932</a>
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

## 波の共鳴という観点から見た不安定波動

九大 応力研 伊賀 啓太 (Keita Iga)

### 1 はじめに

気象力学や海洋物理学では様々な形の平行流に対する不安定性が広く調べられてきた。流れの線形不安定性解析は固有値問題に帰着されるが、固有値問題を解く手続きは確立しており、問題を解くこと自体には数学的な困難はない。しかし、不安定の物理的意味を解釈するのは簡単なことではないことが多い。

複雑な不安定モードを物理的にわかりやすい形で理解しようとする試みとして、中立波の共鳴の考え方がある (Cairns 1979)。この考え方は、エネルギーや運動量の保存則に基づいて出てきたもので、その1次の線形の項だけではなく2次の項まで考えてはじめて得られるものである。つまり、「非線形」の効果まで考えることによって、「線形」不安定問題をより深く、よりわかりやすく理解できることになる。

本稿では、まず運動量やエネルギーの保存則からはじめて、さまざまな状況における「波の共鳴による不安定の理解」の仕方について述べてみたい。

### 2 擬運動量・擬エネルギー

回転系での浅水波を考えて、

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v = -g \frac{\partial h}{\partial x} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + f u = -g \frac{\partial h}{\partial y} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(h u) + \frac{\partial}{\partial y}(h v) = 0 \quad (2.3)$$

の基礎方程式から出発する。

(2.1)×hu + (2.2)×hv + (2.3)×[ $\frac{1}{2}(u^2 + v^2) + gh$ ] を積分して、

$$\frac{d}{dt} \int dy \left[ \frac{h(u^2 + v^2)}{2} + \frac{gh^2}{2} \right] = 0$$

(2.1)×h + (2.3)×(u - ∫ f dy) を積分して、

$$\frac{d}{dt} \int dy \left[ h \left( u - \int f dy \right) \right] = 0$$

さらに、[∂(2.2)/∂x - ∂(2.1)/∂y]/h - (2.3) × (∂v/∂x - ∂u/∂y + f)/h<sup>2</sup> より

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f}{h} = 0$$

を得る。つまりこの系において、

$$E \equiv \int dy \left[ \frac{h(u^2 + v^2)}{2} + \frac{gh^2}{2} \right] \quad (2.4)$$

$$M \equiv \int dy \left[ h \left( u - \int f dy \right) \right] \quad (2.5)$$

$$q \equiv \frac{\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} + f}{h} \quad (2.6)$$

で定義されるエネルギー  $E$ , 運動量  $M$ , 渦位  $q$  が保存することを示している。ここで、エネルギーと運動量は全領域で積分した全体の量として保存するのに対して、渦位は各点においてラグランジュ的に保存することに注意したい。

$x$  方向に一様な平行流を基本場として、線形不安定論を考える。つまり

$$u = U(y) + u', \quad v = v', \quad h = H(y) + h', \quad (2.7)$$

のように、基本場部分と擾乱部分とに分けて (2.1)~(2.3) に代入し、1 次の項までとると、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + U \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{dU}{dy} - f v' = -g \frac{\partial h'}{\partial x} \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t} + U \frac{\partial v'}{\partial x} + f u' = -g \frac{\partial h'}{\partial y} \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial h'}{\partial t} + U \frac{\partial h'}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (H u') + \frac{\partial}{\partial y} (H v') = 0 \quad (2.10)$$

となり、線形安定性の議論はこの線形方程式を解くことによって行なわれる。線形安定性の議論をする場合、(2.4), (2.5) の表式の  $u, v, h$  に基本場部分を代入した基本場のエネルギー、基本場の運動量

$$E_0 \equiv \int dy \left( \frac{H U^2}{2} + \frac{g H^2}{2} \right) \quad (2.11)$$

$$M_0 \equiv \int dy \left[ H \left( U - \int f dy \right) \right] \quad (2.12)$$

と、(2.4), (2.5) に (2.7) を代入して 2 次の項を取り出した波のエネルギー、波の運動量

$$E_1 \equiv \int dy \left[ \frac{H(u'^2 + v'^2)}{2} + \frac{g h'^2}{2} + U h' u' \right] \quad (2.13)$$

$$M_1 \equiv \int dy h' u' \quad (2.14)$$

を考えて、その間のやりとりを議論することがよくある。ところが、この議論では少し不思議に思えることが起こる。この線形論では時間的に変化しない基本場を考えるので、基本場のエネルギーや運動量は時間変化しない。ところが不安定が起こる場合、波のエネルギーや運動量は増減してしまう。つまり、波のエネルギーや運動量は、そのやりとりする相手がないままに (エネルギーや運動量を引き出す相手がないままに) その値を変えてしまうことになってしまう。一般的には、これは次のように説明される。基本場のエネルギーや運動量は波のそれらよりオーダーが

2つ大きい。そのため、やりとりした量は波の量にとっては大きい、基本場にとっては無視できるくらい小さくなり、基本場の量の時間変化としてあらわには出てこない。

この事情は2次の項まで展開することによってはっきりする。

$$\begin{aligned} u &= U(y) + u' + u^{(2)}, \\ v &= v' + v^{(2)}, \\ h &= H(y) + h' + h^{(2)}, \end{aligned}$$

とすると、波のエネルギー、波の運動量と同じオーダーの量である2次のエネルギー、運動量

$$E_2 \equiv \int dy \left( \frac{HUu^{(2)}}{2} + \frac{h^{(2)}U^2}{2} + \frac{gHh^{(2)}}{2} \right) \quad (2.15)$$

$$M_2 \equiv \int dy \left[ Hu^{(2)} + h^{(2)} \left( U - \int f dy \right) \right] \quad (2.16)$$

が新たに現れ、これが基本場のエネルギーや運動量の変化部分を担うことになる。この部分を基本場のエネルギーや運動量の一部に入れずに、波のエネルギー・運動量とまとめて

$$E_d \equiv E_1 + E_2 \quad (2.17)$$

$$M_d \equiv M_1 + M_2 \quad (2.18)$$

で定義される  $E_d, M_d$  を差分エネルギー・差分運動量と呼ぶが、この  $E_d, M_d$  は全エネルギー・運動量の2次の項を取り出したことになり、従って保存する量である。

さて、 $E_2, M_2$  には渦位の擾乱部分  $q'$  を用いて表現した量に同じものがある。つまり、

$$q' \equiv \frac{\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y} - Qh'}{H}, \quad Q \equiv \frac{f - \frac{dU}{dy}}{H}$$

として、

$$E_q \equiv \int dy \frac{H^2 U q'^2}{2 \frac{dQ}{dy}} \quad (2.19)$$

$$M_q \equiv \int dy \frac{H^2 q'^2}{2 \frac{dQ}{dy}} \quad (2.20)$$

という量を作ると、

$$E_2 = E_q, \quad M_2 = M_q$$

となるのである。そこで擬エネルギー  $E_p$  と擬運動量  $M_p$  を

$$E_p \equiv E_1 + E_q \quad (2.21)$$

$$M_p \equiv M_1 + M_q \quad (2.22)$$

で定義すると、 $E_p, M_p$  は  $E_d, M_d$  と等しくなり、従って  $E_p$  と  $M_p$  も保存することになる。さらに、 $E_p, M_p$  はともに1次の量の振幅の2乗に比例する形で書かれるという、 $E_d, M_d$  にはない特徴も持っている。

不安定モードの  $E_p$  について考えると、不安定モードの振幅は時間とともに大きくなるが、もし  $E_p > 0$  なら  $E_p$  は時間とともに大きくなってしまい、もし  $E_p < 0$  なら  $E_p$  は時間とともに小さ

くなってしまう、これらの量は保存し得なくなってしまう。つまり、 $E_p = 0$  でなければならないのである。同様に  $M_p = 0$  でなければならない。

$E_p$  や  $M_p$  は保存し、かつ振幅の2乗に比例するということから「不安定モードの  $E_p$  や  $M_p$  は0でなければならない」という重要な結論が導かれるのである。なお、ここでは1層の浅水系を例にとったが、2層であったり2次元順圧系や準地衡流系など他の系でも  $E_p$  や  $M_p$  の表式が違うだけで同様な議論ができる。

### 3 不安定を構成する中立波の調べ方

不安定モードでは擬運動量や擬エネルギーが0になることが示されたが、実際にはどのようにしてこれらの量が0になっているのであろうか。不安定問題を実際に解いてその擬エネルギー(や擬運動量)を調べた Hayashi and Young (1987) によると、正の擬運動量を持った中立波モードと負の擬運動量を持った中立波モードの分散曲線が交わるところで、不安定モード(従って、擬運動量は0)が生じている。その固有関数の構造を見ると、両中立波の構造を重ね合わせたようなものになる。つまり、2つのモードの擬運動量を合わせてちょうど0になるようになっているのである。あるいは言い方を変え、負の擬運動量を持った波から正の擬運動量を持った波へ擬運動量が受け渡されて、全体では運動量の保存が成り立っていると見ることもできる。

この様子は2層問題で起こる不安定ではもっとはっきりと現れることが Sakai (1989) によって示された。2層問題で起こる不安定は、例えば上層の負の擬運動量を持った中立波モードと下層の正の擬運動量を持った中立波モードと(あるいはその逆の組合せ)で生じ、この時、擬運動量は上層から下層へと輸送される。Sakai (1989) は、このような組合せによって不安定が起こるのを中立波どうしの「共鳴」と表現した。2層問題の場合、一方の層の深さを無限大にすることによって仮想的に1層だけを取り出した問題というのを作ることができるので、1層問題の中立波の分散曲線を重ね合わせることによって2層問題の不安定モードをどのモードとどのモードの共鳴で起こったのか同定することができる。

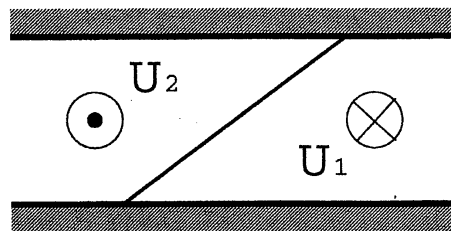


図 1: Iga (1993) で安定性を解析した前線のモデル

実際 Iga (1993) は図 1 のようなモデルの前線不安定にこの方法を適用して、現れる不安定モードの解析をし(図 2)、Orlanski (1968) によって得られた複雑な不安定モードをすっきりした形で整理している。

2層問題に限らず、全系を構成する「部分系」を作ることができるなら同様の解析が容易に行なえる。一般的にはこのような「部分系」を作ることが難しいことも多いが、Hayashi and Young (1987) のやりかたに戻って「不安定モードにつながる中立モードの分散曲線をたどる」ということを行えばよい。このようにして、さまざまな不安定は波の共鳴の考え方によって物理的にわかりやすい形で理解できるようになった。具体的な手続きをまとめると、次のようになる。

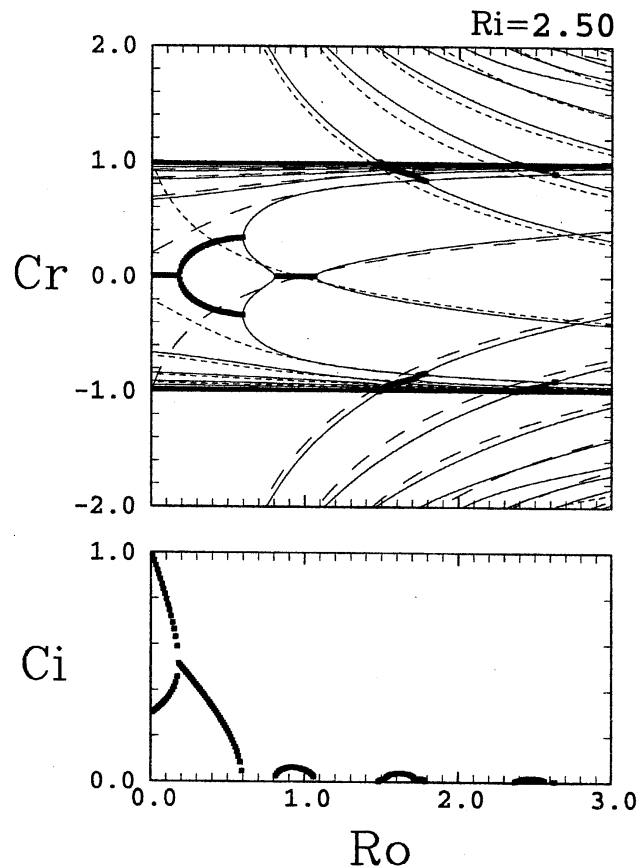


図 2:  $Ri$ (基本場を特徴づける無次元パラメータ) が 2.5 の時の前線不安定問題の分散関係 (実線)。太線は不安定を表す。破線は上層 1 層問題、点線は下層 1 層問題の中立波の分散曲線。

- 部分系を構成することが容易な場合  
部分系の中に存在する中立波を求め、各部分系の分散曲線を重ね合わせる。全系をきちんと解いた場合の不安定モードは、正の擬運動量を持ったモードと負の擬運動量を持ったモードの分散曲線が交わる場所に現れ、両中立波の共鳴によってできたものと解釈することができる。(図 3(a))
- 部分系を構成することが容易ではない場合  
分散曲線において、不安定モードにつながる 2 つの中立波の分散曲線を探す。それぞれの中立波の性質を調べることによって、どんな波とどんな波の共鳴によって起こった不安定かがわかる。(図 3(b))

不安定モードに比べて中立波がどのような性質のものかは比較的調べやすいことが多い。そのためいずれの場合にしても、この不安定はどんな性質の中立波とどんな性質の中立波の共鳴によってできたから、どんな不安定であるということが推定できるのである。

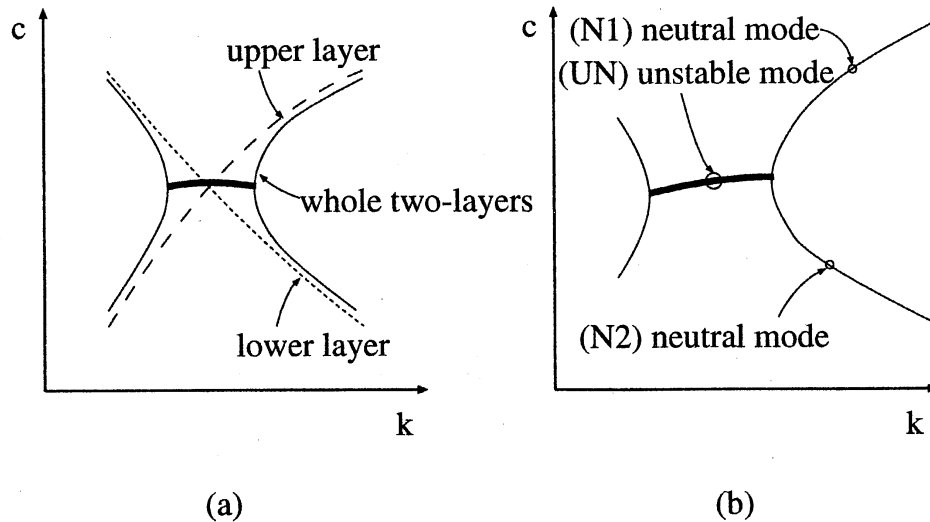


図 3: 共鳴による不安定モードの理解。(a) 2層問題のように部分系が構成できる場合。2層問題全体を解いた時の不安定モードは上層1層問題と下層1層問題の分散曲線の交点にある。(b) 部分系が容易には構成できない場合。不安定モードにつながる二つの中立モード (N1), (N2) の構造を調べることによって、不安定モード (UN) がどのようなモードの共鳴で起きたかわかる。

#### 4 臨界層不安定の場合—共鳴する相手が連続モードの場合—

以上のような波の共鳴による考え方で、さまざまな不安定をわかりやすく理解できるようになったはずであるが、いざこの方法を適用しようとする、困難にあたることが多い。Lin の中立波存在条件の定理 (Lin 1945) によって、基本流の流速のどこかに正則な中立波の位相速度と等しい速さを持つ点 (臨界点という) が存在する時には、その点における渦位勾配は 0 でなければならない。言い替えると、臨界点を持つような正則中立波は渦位勾配が 0 であるような特殊な場合にしか存在しないのである。一方、不安定モードの位相速度の実数部分は (わずかな例外を除いて) 一般的には基本流の流速の範囲内にあることが知られている。従って、不安定モードにつながる中立波の分散曲線の組を探そうとしても、一つしか見つからなかったり全くなかったりするのである。これではこの波の共鳴の考え方は適用できないことになる。実は今までに波の共鳴で不安定の物理的理解ができた例としてあげた問題は、全て流速か渦位かのどちらかが区分的に一樣である特殊な例であったのである。そうするとこの考え方は一般的には使えない非常に適用範囲の狭い考え方なのだろうか。

不安定モードにつながる中立波の分散曲線が見つからない例として、まず臨界層不安定を取り上げよう。臨界層不安定というのは、もし基本流がなければ中立波が存在したはずであるのに、基本流の存在によって臨界点ができて生じた不安定である (Bretherton 1966)。このような不安定の場合、基本流の範囲内にある不安定モードが、範囲外に出ると中立モードとなるだけで、不安定モードにつながる中立波は一つしかない。

Iga (1999a) に従って、具体的にこのような臨界層不安定を見てみよう。2層からなる水路を考え、下層の流速にはシアーを持たせる。上層の中立波の位相速度が下層の流速の範囲内に入った時の振舞いを調べるのである。この場合不安定が起きるかどうかは、上層の中立波の基本流速を差し引いた位相速度の符号と下層の渦位勾配の符号とで決まる。つまり、これらが同符号なら不安定が起きるが、異符号なら不安定は起きない。

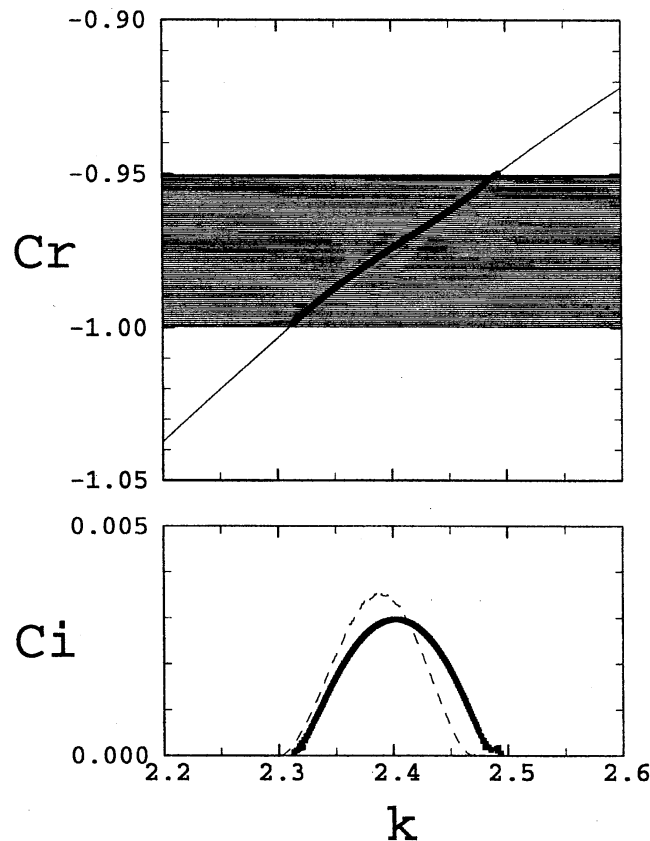


図 4: 基本流速を差し引いた正則モードの位相速度が負、下層の渦位勾配が負の時に起こる臨界層不安定の分散関係。下層の基本流速の範囲 $-1.00 \sim -0.95$ には、離散化された連続モードが見られる。

不安定が起きる場合に、この不安定を波の共鳴で不安定を理解しようとする、上層の中立波はすぐに特定できるが、下層には共鳴を起こす中立波がないように見える。この疑問を解決するためには連続モードを考えなければならない。連続モードとは、臨界点において特異性を持つ固有値問題の弱解で、基本流の存在する範囲に連続的に存在する (Case 1960)。この臨界層不安定は、上層の普通のモードと下層の連続モードとの共鳴で起こったと解釈することができるのである。ただし、連続モードはそれ 1 つだけでは特異性を持つので、正則な不安定モードを形作るには、単一の連続モードではなく連続モードの重ね合わせを考えなければならない。その重ねる重みは、ピークの中心を臨界点として基本流の速度がそこから  $c_i$  ずれると振幅が  $1/\sqrt{2}$  倍に下がるような分布を持つ (Iga 1999a)。

## 5 シアー不安定の場合—共鳴するモードが隠されている場合—

不安定の中でも最も基本的なものの一つであるシアー不安定も、そこにつながる中立波が見つからない例の一つである。(この場合には不安定モードにつながる中立波は一つもない。) 臨界層不安定の場合と同様に連続モードが共鳴するモードとなるのであろうか?

2次元流を考え、 $x$  軸に平行な  $\tanh$  型プロファイルのシアー流を基本場としてとる。基本場が



$U(y) = \tanh y$ で表されるシアー流に対しては、波数  $k < 1$  のところで不安定モードが存在することが知られている (Michalke 1964)。この設定の場合、 $k = 1$  の波数まで存在する不安定モードにつながる中立波の対を探すことになるが、 $y < 0$  では  $Q'(y) < 0$ 、 $y > 0$  では  $Q'(y) > 0$  のため、 $c \neq 0$  の中立波は存在せず、不安定モードにつながる中立波は見つからない。

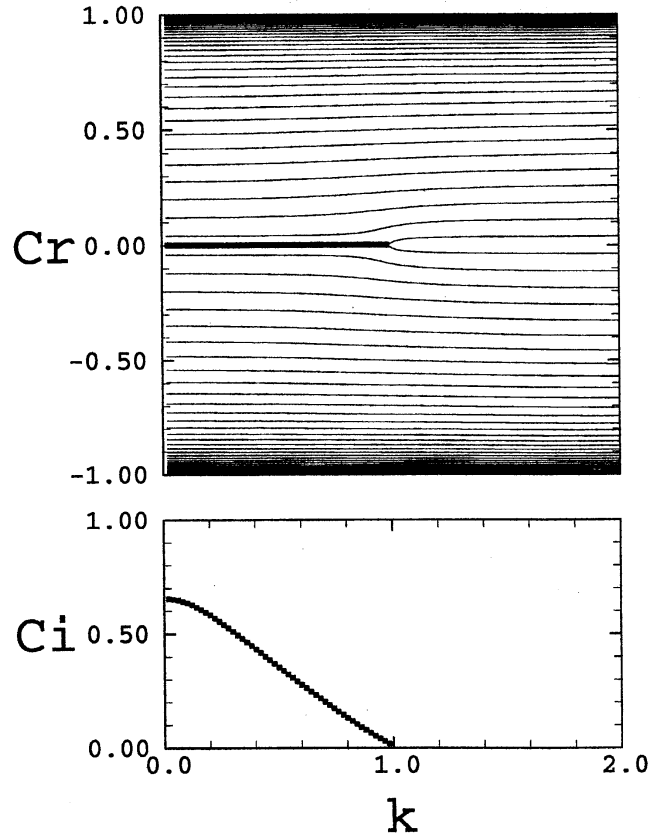


図 5: 差分化して解いた  $\tanh$  型プロファイルのシアー流の分散曲線。太線が不安定モードを表す。

図 5はこの問題を  $-4 < y < 4$  の有限区間で数値的に差分化して解いたものであるが、 $k < 1$  に存在する不安定モードの他には、差分化によって分離された連続モードが現れている。図 5のように差分化して得た分散曲線を見ると、離散化された連続モードの分散曲線が 2 つくっついて不安定モードにつながっているように見える。そのため、臨界層不安定の場合のように、連続モードが不安定モードの共鳴を起こしているという考えが浮かんでくる。しかし、この考え方は次のような理由で、あまり適当ではないと考えられる。差分化した時に互いに隣接する 2 つの連続モードが不安定モードにつながるが、これらの対は差分の間隔を狭くするにつれて次第に接近していき、差分の間隔を 0 にする極限では対は同一のものに移行してしまうのである。共鳴を起こす対はこれ以外にあると考えるべきであろう。

共鳴を起こす中立波の対がこれ以外にあると考えた時の一番の問題点は、実際に問題を解いてもそのようなモードが解として得られないということである。この設定において、もし不安定モードにつながる中立波の対が存在したとすると、その一方の分散曲線は  $k = 1, c = 0$  から  $k > 1, c > 0$  の領域にのび、もう一方の分散曲線は  $k > 1, c < 0$  の領域にのびる。前者は、 $k$ - $c$  面上の分散曲線

が正の傾きを持ち ( $dc/dk > 0$ )、従って擬運動量は負である (Iga 1999b)。ところが、 $c > 0$  の領域では臨界点  $y_c$  が存在してそこでは  $Q'(y_c) > 0$  なのであるが、負の擬運動量を持つ正則モードが  $Q'(y_c) > 0$  の臨界点を持つ基本場の領域に入ると、連続モードに埋もれて正則なモードとしては存在なくなってしまうのである (Iga 1999a)。 $c < 0$  のモードも同様に見えなくなり、結局不安定モードにつながる正則なモードは問題を解いても現れてこない。

以上のような考えに基づくと、「基本場に隠されているために解としては存在しないが、共鳴を起こす中立波が実態として存在しており、シア不安定はその基本場に隠されている中立波どうしの共鳴として考えられる」という説明が浮かんでくる。しかし、それを明示するためには、隠されている中立波を抽出する必要がある。

中立波が隠れてしまうのは、基本場の渦位が一樣でないからであり、明示するためには、基本場の渦位を一樣にすればよい。しかし一方で、渦位を一樣にすることによって探している中立波が大きな変形を受けてしまったり、極端な場合には探している中立波そのものがなくなったりして意味がない。そこで、中立波が大きな変形を受けないように、基本流のごく一部だけの渦位を一樣にすることを考えた (図 6)。ただし、これでは隠れていた分散曲線全体のうちのごく一部しか取り出せない。そこで、同じことを基本流の各部分について行ない、全ての結果をまとめることによって、隠れた中立波の分散曲線を完成させることができるのではないだろうか。

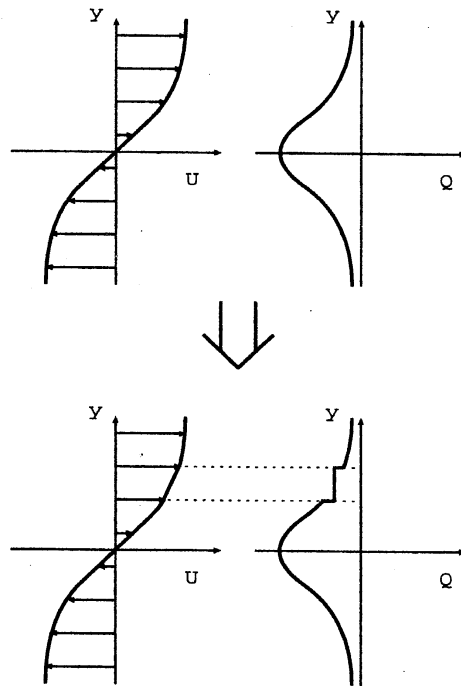


図 6: 隠れた中立波が現れる状況設定。基本場の小さな区間の渦位を一樣にする。

図 7 はこのようにして作成した分散曲線である。隠されていた中立波は  $x$  で示してあるが、 $k > 1$  に存在するこのような二つの中立波が  $k < 1$  では共鳴して不安定モードを形成している様子がうかがえる。このシア不安定が、基本流に (連続モードに) 隠されていた中立波どうしの共鳴によってうまく説明できるように思われる。

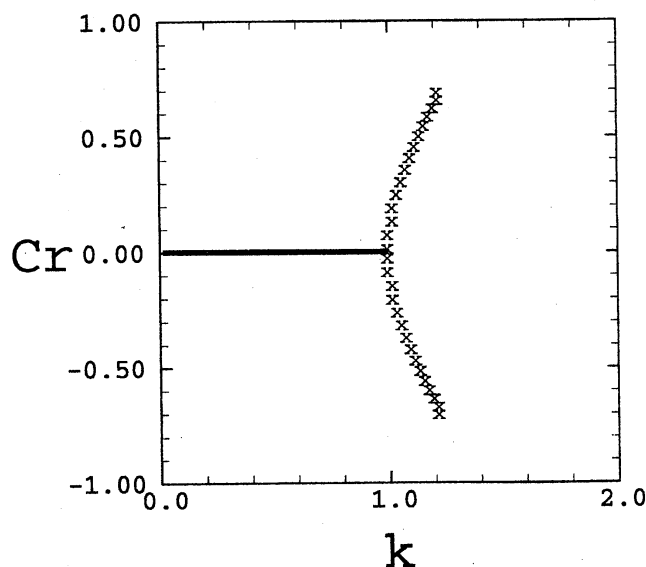


図 7: 非一様な渦位によって隠されていた中立波の分散曲線

## 6 まとめ

不安定を中立波の共鳴として理解する考え方について簡単に見てきた。この考え方で、不安定をおこす中立波の対を探し、その中立波の性質を見ることによって前線不安定などのさまざまな複雑な不安定が物理的に簡単に理解できるようになったが、一般的な場合に適用すると、「連続モード」がいろいろな場面でキーポイントになっていることがわかる。ある時は共鳴する中立波の一方になったり、またある時は共鳴する中立波を隠してしまったり、さまざまな形で登場するのである。中立波の共鳴による不安定の理解には、連続モードの本質的な理解を避けて通れないようである。

### 参考文献

- Bretherton, F. P. (1966) Critical layer instability in baroclinic flows, *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **92**, 325-334.
- Cairns, R. A. (1979) The role of negative energy waves in some instabilities of parallel flows, *J. Fluid Mech.*, **92**, 1-14.
- Case, K. M. (1960) Stability of inviscid plane Couette flow, *Phys. Fluids*, **3**, 143-148.
- Hayashi, Y.-Y. and Young, W. R. (1987) Stable and unstable shear modes on rotating parallel flows in shallow water, *J. Fluid Mech.*, **184**, 477-504.
- Iga, K. (1993) Reconsideration of Orlanski's instability theory of frontal waves, *J. Fluid Mech.*, **255**, 213-236.
- Iga, K. (1999a) Critical layer instability as a resonance between a non-singular mode and continuous modes, *Fluid Dyn. Res.*, (in press)

- Iga, K. (1999b) A simple criterion for sign of wave-momentum in shallow water systems, *J. Fluid Mech.*, (accepted)
- Lin, C. C. (1945) On the stability of two-dimensional parallel flows Part. II, *Quart. Appl. Math.*, **3**, 218-234.
- Michalke, A. (1964) On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile, *J. Fluid Mech.*, **19**, 543-556.
- Orlanski, I. (1968) Instability of frontal waves, *J. Atmos. Sci.*, **25**, 178-200.
- Sakai, S. (1989) Rossby-Kelvin instability: a new type of ageostrophic instability caused by a resonance between Rossby waves and gravity waves, *J. Fluid Mech.*, **202**, 149-176.